INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE
ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ÉLÈVES TITULAIRES STATISTICIENS ÉCONOMISTES
À L'ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ADMINISTRATION ÉCONOMIQUE

Juin 1983. — Option MATHÉMATIQUES

TROISIÈME COMPOSITION
DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 2 heures

On considère l'application f de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$x \longmapsto f(x) = \operatorname{Log} x + \operatorname{Arc}\sin\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

I

1° Justifier, succinctement, que f est définie et indéfiniment dérivable sur $]0, +\infty[$. Calculer sa dérivée et déterminer, sans autre calcul, le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.

Exprimer $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $f'\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en fonction de x, $f(x)$ et $f'(x)$.

.../...

2° Calculer $f''(x)$ et donner son signe lorsque x est compris entre 0 et 1. Dans l'intervalle $[1, +\infty[$ on utilise la fonction auxiliaire φ : $\varphi(x) = -\dfrac{(x^2+1)^2}{x} f'(x)$. Calculer et simplifier $\varphi'(x)$; déterminer son signe en remarquant que pour x compris entre 1 et $\sqrt{3}$ des majorations, minorations simples permettent de comparer les deux termes dont la différence est $x^4 . \varphi'(x)$.

Donner, dans un unique tableau, les signes de f'' et de f', le sens de variation et les limites de f.

3° Calculer les expressions exactes, simplifiées, de $\varphi(2)$ et $\varphi'(2)$ puis leurs meilleures valeurs décimales approchées à 10^{-6} près (l'incertitude est donc au plus égale à $\dfrac{1}{2}\,10^{-6}$).

Appliquer, une fois, la méthode de Newton (ou méthode de la tangente) à l'équation $\varphi(x) = 0$ au point $x = 2$. La valeur trouvée, arrondie au mieux à 10^{-2} près, sera appelée α.

Disposer, sans autre justification, dans un unique tableau, les meilleures valeurs décimales approchées à 10^{-4} près de $f(x)$ et $f'(x)$ pour x prenant les valeurs α, $\dfrac{1}{\alpha}$, 5, $\dfrac{1}{5}$.

4° Construire, en repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction f; on prendra 3 cm pour unité. Il est inutile de construire d'autres points ou tangentes que ceux obtenus à la troisième question.

II

La convergence des intégrales $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{Log}\,x\,dx$, lorsque la fonction g est définie et continue sur [0, 1], est considérée comme connue.

1° Utiliser une intégration par parties et un changement de variable pour exprimer l'intégrale $J = \int_0^1 f(x)\,dx$ au moyen d'un logarithme et de l'intégrale $I = \int_0^1 \dfrac{-\mathrm{Log}\,t}{1+t}\,dt$.

2° m étant un entier positif ou nul déterminer la valeur, exacte en fonction de m, de $a_m = \int_0^1 t^m . (-\mathrm{Log}\,t)\,dt$.

En déduire, n entier variant de 1 à 4, les valeurs des nombres

$$b_n = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{3}\right)^n . (-\mathrm{Log}\,t)\,dt\,;$$

les candidats laisseront apparaître quelques détails des calculs et donneront les 4 nombres demandés sous forme de fractions irréductibles.

3° Pour calculer I on tronque un développement en série géométrique de $\dfrac{1}{1+t}$ autour de $\dfrac{1}{3}$ (on peut, temporairement, poser $h = t - \dfrac{1}{3}$) :

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{p=0}^{3} C_p \left(t - \frac{1}{3}\right)^p + R(t)$$

d'où on déduit $I = \sum_{p=0}^{3} C_p\, b_p + \int_0^1 R(t) . (-\mathrm{Log}\,t)\,dt$.

Déterminer les coefficients C_p et l'expression de $R(t)$.

4° Montrer, en la déterminant, qu'il existe une constante K telle que

$$\frac{1}{2}\,K\,b_4 \leqslant \int_0^1 R(t)\,(-\mathrm{Log}\,t)\,dt \leqslant K\,b_4 .$$

Calculer les meilleures valeurs décimales approchées à 10^{-6} près des 4 nombres $C_p\,b_p$ pour $0 \leqslant p \leqslant 3$ et celles de Kb_4 et $\dfrac{1}{2}\,Kb_4$.

En déduire un encadrement de I puis un encadrement de J, encadrements par 2 nombres décimaux correctement arrondis à la 5e décimale.

5° Déterminer un meilleur encadrement de I en prenant 2 termes de plus dans la série (on ne demande pas la réduction en fraction de b_5 et b_6).

FIN